Wiskunde voor bachelor en master

Deel 4 Vectorrekening en matrixrekening

Anne Kaldewaij

2019, Syntax Media, Utrecht

Over de serie

Er is behoefte aan een degelijke wiskundekennis in tal van studies op hogescholen en universiteiten. Studenten dienen te beschikken over wiskundig inzicht waarmee zij de wiskundige toepassingen aankunnen die in andere vakken worden gebruikt.

Met de serie *Wiskunde voor bachelor en master* leer je hoe je in de praktijk met wiskunde omgaat. Dit zie je terug in de aanpak: veel uitleg met toepassingen en weinig bewijzen in strikt wiskundige zin. Elk deel bevat veel voorbeelden en heeft een grote verzameling opgaven, waaruit de docent een gerichte keus kan maken.

De eerste twee delen vormen de basis van de serie:

Deel 1 Basiskennis en basisvaardigheden
Deel 2 Differentiaalrekening en integraalrekening

De overige delen sluiten hier naadloos op aan, maar zijn gericht op meer specifieke onderwerpen. Hiervan zijn reeds verschenen:

Deel 3 Differentiaalvergelijkingen en dynamische systemen
Deel 4 Vectorrekening en matrixrekening

De volgende delen zijn voorzien:

- De Laplace-transformatie
- Fouriertheorie en systeemtheorie
- Actuariële wiskunde
- De wiskunde van het programmeren

De vervolgdelen kunnen onafhankelijk van elkaar worden gebruikt. Sommige passen in de bachelorfase en andere bij specifieke masters.

Over deel 4

Deel 4 van de serie *Wiskunde voor bachelor en master* betreft de behandeling van vectorrekening en matrixrekening met hun toepassingen in verschillende disciplines.

De eerste drie hoofdstukken betreffen de vectorrekening: vectoren in het vlak, in de ruimte en in hogere dimensies. Naast de gebruikelijke notaties komen inproduct, uitproduct, oppervlakte, inhoud en oriëntatie uitgebreid aan de orde.

Stelsels lineaire vergelijkingen komen in hoofdstuk 4 aan bod. Als oplossingsmethoden komen de eliminatiemethode en de regel van Cramer aan de orde.

De matrixrekening is het onderwerp van hoofdstuk 5. Lineaire afbeeldingen worden hierbij als basis gebruikt. Het gebruik van determinanten, eigenwaarden en eigenvectoren wordt besproken met als belangrijke toepassing eigenwaarde-decomposities.

Deze eerste vijf hoofdstukken bevatten de basiskennis die nodig is om effectief met vectoren en matrices te kunnen rekenen.

In de laatste twee hoofdstukken (hoofdstuk 6 en 7) wordt deze kennis toegepast op verschillende gebieden. Deze hoofdstukken kunnen apart van elkaar worden behandeld.

Hoofdstuk 6 bevat twee keuzeonderwerpen die onafhankelijk van elkaar zijn. Het eerste onderwerp is meetkunde (orthogonale afbeeldingen), een basis die bijvoorbeeld nodig is bij technische aspecten van robotica. Het tweede onderwerp gaat over lineaire systemen in de praktijk, zoals modellen voor toestandsovergangen.

Een combinatie van differentiaalrekening en vectorrekening komt in hoofdstuk 7 aan bod. Dit hoofdstuk is technisch van aard en met name bedoeld voor de bèta-studies. Onderwerpen zijn vectorfuncties, banen, parametriseringen, lijnintegralen en vectorvelden.

Alle stof wordt toegankelijk uitgelegd en toegelicht. In het boek zijn antwoorden van de opgaven opgenomen. Volledige didactische uitwerkingen van alle opgaven staan in een apart uitwerkingenboek. Dit uitwerkingenboek kan via de website van de uitgever (*www.syntaxmedia.nl*) of bij een boekhandel worden besteld.

Mijn dank gaat uit naar mijn collega's dr. Lanah Evers en drs. Kees Temme voor hun opmerkingen en suggesties over de eerste hoofdstukken van het boek.

voorjaar 2019

dr. Anne Kaldewaij

Inhoud

1.4.6 Normalen

Een *normaal* van een gegeven vector $\mathbf{a}$ is een vector die loodrecht op $\mathbf{a}$ staat. Als $\mathbf{n}$ zo'n normaal is, dan moet dus gelden $\mathbf{n}\cdot\mathbf{a} = 0$.

Als $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, dan voldoet $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$ hieraan want:

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = -a_2 a_1 + a_1 a_2 = 0$$

Elk veelvoud hiervan voldoet ook, in het bijzonder $\mathbf{n}' = -\begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix}$ met ook:

$$\mathbf{n}'\cdot\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_2 a_1 - a_1 a_2 = 0$$

Je kunt dit gemakkelijk als volgt onthouden:

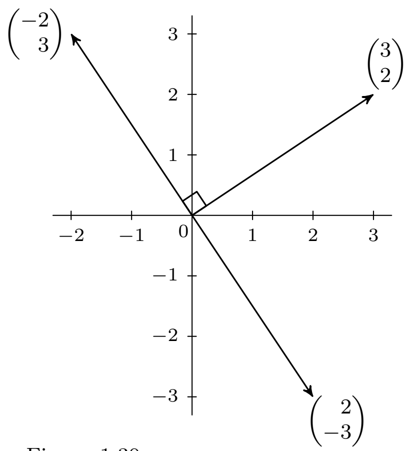
> Een *normaal* van $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ wordt verkregen door a_1 en a_2 te verwisselen en voor één ervan een minteken te plaatsen.

Zo heeft $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ als normalen $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ (figuur 1.30).

Merk op dat $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ uit $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ontstaat door een draaiing over 90° tegen de klok in.

En vector $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ ontstaat uit $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ door een draaiing over 90° met de klok mee.

Een normaal komt van pas wanneer je een lijn loodrecht op een gegeven lijn nodig hebt.



Figuur 1.30

Voorbeelden

1. Gegeven is lijn $\ell\colon \mathbf{x} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix}$.

   Lijn k staat loodrecht op ℓ en gaat door het punt $(2,6)$. We bepalen lijn k.

   De richtingsvector van k staat loodrecht op richtingsvector $\begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix}$ van ℓ.

   Een normaal van $\begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix}$ is $\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$ en dit is dus een richtingsvector van k.

   Punt $(2,6)$ ligt op k en $\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$ is dus een steunvector van k.

   Een vectorvoorstelling is dan $k\colon \mathbf{x} = \begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$.

2. We bepalen de middelloodlijn van AB met $A = (1,3)$ en $B = (5,9)$.

   Deze middelloodlijn staat loodrecht op AB en gaat door het midden van AB.

   De richting van AB is $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}5-1\\9-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$

   En normaal daarvan is $\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}$, maar we nemen het eenvoudiger veelvoud $\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$.

   Het midden van AB is $(\frac{1}{2}(1+5), \frac{1}{2}(3+9)) = (3,6)$, dus $\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$ is steunvector.

   Een vectorvoorstelling van de middelloodlijn is dan $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$.

1.4.7 Opgaven

1. Bepaal normalen van:

   a. $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$

2. Bepaal een vectorvoorstelling van de lijn door punt $(1,2)$ die loodrecht staat op de lijn $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}40\\25\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

Dus geldt:

De grootte van het moment ten opzichte van O is is gelijk aan $|\mathbf{r}|\cdot|\mathbf{F}|\cdot\sin\phi$.

Als $\phi = 90°$, dan is het moment maximaal ($\sin 90° = 1$): in de praktijk trek je loodrecht op de moersleutel voor een maximaal effect. Als $\phi = 0°$, dan is het moment 0 ($\sin 0° = 0$): trek je in de richting van de moersleutel, dan gebeurt niets met de bout.

Behalve een grootte heeft een moment ook een richting. Als de bout wordt losgedraaid, dan komt deze uit de pagina naar voren en dat kiezen we als richting van het moment. Het moment staat loodrecht op de vectoren $\mathbf{r}$ en $\mathbf{F}$ en komt uit de pagina naar voren.

Deze richting past bij de beweging van een *kurkentrekker* als je die in O loodrecht op het vlak door $\mathbf{r}$ en $\mathbf{F}$ plaatst en dan draait over de kleinste hoek (ϕ) van $\mathbf{r}$ naar $\mathbf{F}$.

Het moment $\mathbf{M}$ staat dus loodrecht op het vlak door $\mathbf{r}$ en $\mathbf{F}$ en er geldt:

De *grootte* van $\mathbf{M}$ is $|\mathbf{r}|\cdot|\mathbf{F}|\cdot\sin\phi$ en de *richting* van $\mathbf{M}$

past bij de draaiing van $\mathbf{r}$ naar $\mathbf{F}$ van een kurkentrekker.

Wiskundig noteer je dit als $\mathbf{M} = \mathbf{r}\times\mathbf{F}$ waarbij $\times$ staat voor het uitproduct.

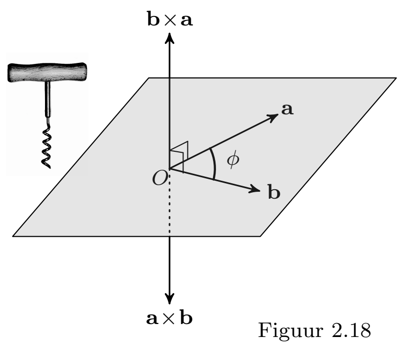
Dit *uitproduct*van $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ is per definitie de vector $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ met de eigenschappen:

1. $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ staat loodrecht op het vlak door $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$.
2. $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\sin\phi$ met ϕ de hoek tussen $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$.
3. De richting van $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ past bij de *kurkentrekkerregel*:
   Plaats je een kurkentrekker in de oorsprong loodrecht op het vlak door $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ en draai je deze van $\mathbf{a}$ naar $\mathbf{b}$ over de kortste hoek, dan beweegt de kurkentrekker zich al draaiend in de richting van $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$.

In figuur 2.18 zijn de vectoren $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ getekend en een kurkentrekker.

Draai je van $\mathbf{a}$ naar $\mathbf{b}$ over hoek ϕ, dan gaat de kurkentrekker richting $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$.

Draai je van $\mathbf{b}$ naar $\mathbf{a}$ over hoek ϕ, dan gaat de kurkentrekker richting $\mathbf{b}\times\mathbf{a}$.



Figuur 2.18

Het uitproduct heeft als eigenschappen:

$\mathbf{b}\times\mathbf{a} = -\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ (figuur 2.18)

$\mathbf{a}\times\mathbf{0} = \mathbf{0}$ en $\mathbf{0}\times\mathbf{b} = \mathbf{0}$

$\mathbf{a}\times\mathbf{a} = \mathbf{0}$ (want $\sin 0° = 0$)

$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \;\Rightarrow\; |\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|$ (want $\sin 90° = 1$)

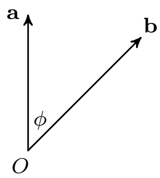
2.5.1 De formule voor het uitproduct

Om een formule voor het uitproduct af te leiden is de regel $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})+(\mathbf{a}\times\mathbf{c})$ nodig, want dan kun je haakjes uitwerken. Deze regel wordt als volgt afgeleid.

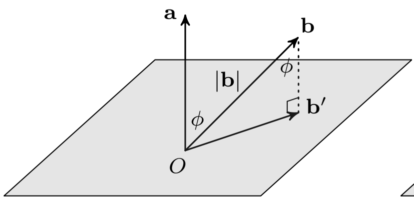
In figuur 2.19 staan de vectoren $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ getekend met de hoek ϕ daartussen.
Vector $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ staat loodrecht op $\mathbf{a}$ en ligt dus in het vlak dat $\mathbf{a}$ als normaal heeft.
In figuur 2.20 is dit vlak getekend, samen met de projectie $\mathbf{b}'$ van $\mathbf{b}$ op dit vlak.
Uit figuur 2.20 volgt $|\mathbf{b}'| = |\mathbf{b}|\sin\phi$. Dus geldt:

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}'| = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}'|\cdot\sin 90^\circ = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}'| = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\sin\phi = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$$

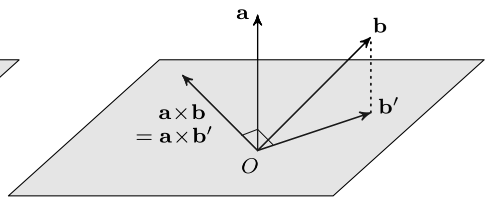
Ook de richtingen van $\mathbf{a}\times\mathbf{b}'$ en $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ zijn gelijk (loodrecht op $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ en $\mathbf{b}'$ en dezelfde kant op). De conclusie is: $\mathbf{a}\times\mathbf{b}' = \mathbf{a}\times\mathbf{b}$ (figuur 2.21).



Figuur 2.19



Figuur 2.20



Figuur 2.21

Omdat $\mathbf{b}' \perp \mathbf{a}$, krijg je $\mathbf{a}\times\mathbf{b}'$ uit $\mathbf{b}'$ door deze over 90° te draaien in dit vlak loodrecht op $\mathbf{a}$ en daarna de lengte met $|\mathbf{a}|$ te vermenigvuldigen.

Samengevat kun je $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ dus als volgt construeren:

- Projecteer $\mathbf{b}$ op het vlak door O loodrecht op $\mathbf{a}$, dat levert $\mathbf{b}'$.
- Draai vector $\mathbf{b}'$ in datzelfde vlak over 90°.
- Vermenigvuldig de resulterende vector met $|\mathbf{a}|$, dat levert $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$.

Bij een projectie op een vlak gaat de som van vectoren over in de som van de projecties hiervan (de projectie van een parallellogram is weer een parallellogram). Dit geldt ook voor draaiingen en we zeggen dat projecties en draaiingen *lineaire afbeeldingen* zijn: sommen gaan over in overeenkomstige sommen en veelvouden gaan over in overeenkomstige veelvouden.

Het resultaat van de bovenstaande analyse is dat ook het uitproduct lineair is.
In formulevorm betekent dit:

$$\lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{a})\times\mathbf{b} = \mathbf{a}\times(\lambda\mathbf{b})$$

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b}) + (\mathbf{a}\times\mathbf{c}) \quad \text{en} \quad (\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c} = (\mathbf{a}\times\mathbf{c}) + (\mathbf{b}\times\mathbf{c})$$

2.8 Vectoren in de ruimte – een samenvatting

Het beginpunt van $\mathbf{a}$ in de xyz-ruimte is $(0, 0, 0)$ en het eindpunt is (a_1, a_2, a_3).
De *lengte* van $\mathbf{a}$ is $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

Als $A = (a_1, a_2, a_3)$ en $B = (b_1, b_2, b_3)$, dan is $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$.

Een lijn ℓ kun je vastleggen door een *vectorvoorstelling* $\ell\colon \mathbf{x} = \mathbf{s} + \lambda\mathbf{r}$.
Hierbij heet $\mathbf{s}$ *steunvector* en $\mathbf{r}$ *richtingsvector*.

Een vlak V kun je ook vastleggen door een *vectorvoorstelling* $V : \mathbf{x} = \mathbf{s} + \lambda\mathbf{r_1} + \mu\mathbf{r_2}$.
Hierbij is $\mathbf{s}$ *steunvector* en zijn $\mathbf{r_1}$ en $\mathbf{r_2}$ *richtingsvectoren.*

Het *inproduct*van $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ is $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos\phi$ met ϕ de hoek tussen $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$.
In kentallen geldt: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

Een lijn kun je in de ruimte niet vastleggen door een vergelijking in kentallen.
Een *vergelijking* van een vlak heeft de vorm $ax + by + cz = d$.

Vector $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ staat loodrecht op dit vlak (is een *normaal* van het vlak).

Een vlak in de xyz-ruimte heeft aan weerszijden een *halfruimte*:

- De punten met $ax + by + cz > d$: de halfruimte vanaf V in de richting $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.
- De punten met $ax + by + cz < d$: de halfruimte vanaf V in de richting $-\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

De *afstand* van $P(p_1, p_2, p_3)$ tot $V : ax + by + cz = d$ wordt gegeven door:

$$d(P, V) = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Het *uitproduct* $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ is gedefinieerd door:

1. $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ staat loodrecht op het vlak door $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$.
2. $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\sin\phi$ met ϕ de hoek tussen $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$.
3. De richting van $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ past bij een kurkentrekker die draait over de kortste hoek (dus de hoek tussen 0° en 180°) van $\mathbf{a}$ naar $\mathbf{b}$.

In kentallen geldt: $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{c}$ met $c_1 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$, $c_2 = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$ en $c_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$.

Hierbij is de *determinant* $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc.$

In het xy-vlak heet $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ *positief georiënteerd* als de draaiing van $\mathbf{a}$ naar $\mathbf{b}$ over de kleinste hoek *tegen de klok in* gaat. Dit heet de *positieve draairichting* in het vlak.

De *georiënteerde oppervlakte* van het parallellogram opgespannen door $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ is gelijk aan $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$. Hiervoor geldt:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \text{ is positief georiënteerd}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \text{ is negatief georiënteerd}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a} \text{ en } \mathbf{b} \text{ liggen op één lijn door } O$$

In het xyz-vlak heet $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ *positief georiënteerd* als $\mathbf{c}$ aan dezelfde kant van het vlak door $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ ligt als $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ (het drietal $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ past bij de beweging van een kurkentrekker).

De *georiënteerde inhoud* van het parallellepipedum opgespannen door $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ en $\mathbf{c}$ is gelijk aan $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$. Hiervoor geldt:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \text{ is positief georiënteerd}$$

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \text{ is negatief georiënteerd}$$

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ en } \mathbf{c} \text{ liggen in één vlak door de oorsprong}$$

In het xy-vlak definieert een vergelijking in x en y een kromme in dat vlak.

In de xyz-ruimte definieert een vergelijking in x, y en z een oppervlak in die ruimte.

We formuleren het voorafgaande algemener:

Is A een lineaire afbeelding van het vlak in zichzelf, dan hoort bij A een matrix ten opzichte van een basis van het vlak.

De kolommen van de matrix zijn de beelden van de basisvectoren.

Is $A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\end{pmatrix}$ en $A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\end{pmatrix}$, dan is de bijbehorende matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Is $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$, dan geldt:

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11}x_1 + a_{12}x_2\\a_{21}x_1 + a_{22}x_2\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ heet een 2×2-matrix en $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ is het *product*van matrix A en kolomvector $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$. Dit wordt ook *matrix maal vector* genoemd.

Voorbeelden

1. Voorbeelden van matrix maal vector-vermenigvuldigingen zijn:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot 1 + 3\cdot 2\\2\cdot 1 + 4\cdot 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\10\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot 4 - 1\cdot 1\\2\cdot 4 + 3\cdot 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\11\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot -4 - 1\cdot 1\\-2\cdot -4 + 3\cdot 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\11\end{pmatrix}$$

2. P is de projectie in $\mathbb{R}^2$ op de x-as. Je bepaalt als volgt de matrix van P.

   De projectie van $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ op de x-as is $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, want $(1,0)$ ligt op de x-as.

   De projectie van $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ op de x-as is $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, want $(0,1)$ ligt op de y-as.

   Dus $P\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ en $P\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ en dan is $P = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$.

   Zo is $P\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot 3 + 0\cdot 4\\0\cdot 3 + 0\cdot 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$, wat je ook zou verwachten.

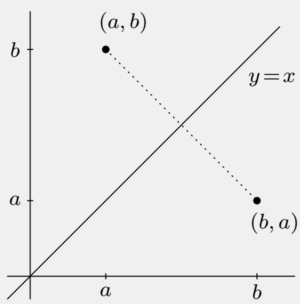
3. In het vlak is de spiegeling in de lijn $y = x$ een lineaire afbeelding.
   Noem deze afbeelding S, dan geldt $S\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ en $S\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ (ga na).

   Dus $S = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$. Zo is $S\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b\\a\end{pmatrix}$.

   Dus de spiegeling in $y = x$ van punt (a, b) geeft punt (b, a) (figuur 5.4).

   Deze eigenschap wordt gebruikt bij inverse functies (paragraaf 1.2 van deel 2).

   Je kunt dit ook meetkundig bepalen, maar het is eenvoudiger met de beelden van $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ en de daaruit resulterende matrix, zoals in dit voorbeeld.



Figuur 5.4

5.2.2 Opgaven

1. Bereken:

   a. $\begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}$

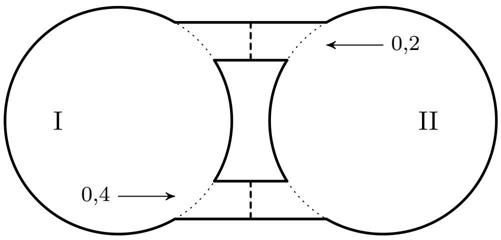
6.2.1 Diffusie via filters

Twee bollen I en II zijn met elkaar verbonden via twee buizen (figuur 6.6). Zij zijn gevuld met vloeistof waarin een stof S is opgelost. Door een filter in de ene buis kan S van I naar II stromen met een hoeveelheid per uur die evenredig is met de in I aanwezige hoeveelheid van S. De evenredigheidsconstante is 0,4.
Net zo vindt in de andere buis stroming van S van II naar I plaats. Daarbij is de hoeveelheid per uur evenredig met de in II aanwezige hoeveelheid van S, met evenredigheidsconstante 0,2.

Op tijdstip $t = 0$ is de hoeveelheid S in I gelijk aan x_0 en in II gelijk aan y_0.

De hoeveelheden S na n uur in I en II geven we aan met x_n en y_n.

Na het eerste uur is een hoeveelheid $0{,}4x_0$ van stof S van I naar II gestroomd en tegelijkertijd een hoeveelheid $0{,}2y_0$ van stof S van II naar I gestroomd.



Figuur 6.6

Dus geldt: $\begin{cases} x_1 = 0{,}6x_0 + 0{,}2y_0 \\ y_1 = 0{,}4x_0 + 0{,}8y_0 \end{cases}$.

Dit kun je schrijven als $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ met $A = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}8 \end{pmatrix}$.

Net zo vind je na 2 uur $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ en na n uur:

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

A^n bepalen we met een eigenwaarde-decompositie.

De karakteristieke vergelijking (paragraaf 5.6) is $(0{,}6 - \lambda)(0{,}8 - \lambda) - 0{,}08 = 0$, ofwel $\lambda^2 - 1{,}4\lambda + 0{,}4 = 0$.

Dus $(\lambda - 1)(\lambda - 0{,}4) = 0$ en dat geeft eigenwaarden $\lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = 0{,}4$.

Eigenvector bij $\lambda_1 = 1$ volgt uit $\left(\begin{array}{rr|r} -0{,}4 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}4 & -0{,}2 & 0 \end{array}\right)$ met oplossing $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Eigenvector bij $\lambda_2 = 0{,}4$ volgt uit $\left(\begin{array}{rr|r} 0{,}2 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0 \end{array}\right)$ met oplossing $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Dit levert $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ bij diagonaalmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}4 \end{pmatrix}$.

De determinant van V is -3 en dat geeft (paragraaf 5.4.1):

$$V^{-1} = -\tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Dus de eigenwaarde-decompositie is (met de factor $\frac{1}{3}$ vooraan gezet):

$$A = \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Dan is:

$$A^n = \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}4^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2{\cdot}0{,}4^n & -0{,}4^n \end{pmatrix}$$
$$= \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 + 2{\cdot}0{,}4^n & 1 - 0{,}4^n \\ 2 - 2{\cdot}0{,}4^n & 2 + 0{,}4^n \end{pmatrix}$$

Uit $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ volgt nu $\begin{cases} x_n = \frac{1}{3}((1 + 2{\cdot}0{,}4^n)x_0 + (1 - 0{,}4^n)y_0) \\ y_n = \frac{1}{3}((2 - 2{\cdot}0{,}4^n)x_0 + (2 + 0{,}4^n)y_0) \end{cases}.$

Voor $n \to \infty$ geldt $0{,}4^n \to 0$, dus $x_n \to \frac{1}{3}(x_0 + y_0)$ en $y_n \to \frac{2}{3}(x_0 + y_0)$.
Op den duur wordt de verdeling van stof S als $1 : 2$ (dus als $0{,}2 : 0{,}4$).

6.2.2 Een transportprobleem

Een transportbedrijf heeft een uitgebreid wagenpark. Het bedrijf beschikt over vier grote parkeerterreinen, verdeeld over het land, die we aangeven met P_1 tot en met P_4 (figuur 6.7).

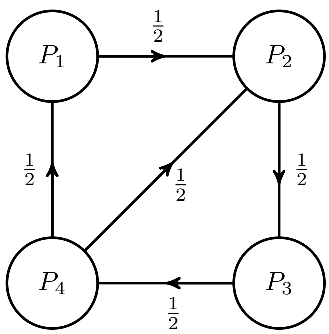
Per dag verplaatst de helft van de op P_1 geparkeerde auto's zich naar P_2.

Dit wordt genoteerd als in de figuur.

Zo vinden dagelijks ook de verplaatsingen $P_2 \to P_3$, $P_3 \to P_4$, $P_4 \to P_1$ en $P_4 \to P_2$ plaats.

Bevinden zich 's morgens op P_1, P_2, P_3 en P_4 respectievelijk x_1, x_2, x_3 en x_4 auto's, dan staan er 's avonds y_1, y_2, y_3 en y_4 auto's, met:

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_4 \\ y_2 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4 \\ y_3 = \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ y_4 = \frac{1}{2}x_3 \end{cases}$$



Figuur 6.7