Wiskunde voor bachelor en master

Deel 4 Vectorrekening en matrixrekening

Uitwerkingen

Anne Kaldewaij

2019, Syntax Media, Utrecht

Het uitwerkingenboek

Dit uitwerkingenboek is een uniek hulpmiddel bij het boek *Vectorrekening en matrixrekening*. Het biedt van alle opgaven een uitwerking met waar nodig een afleiding, nadere toelichting of een grafiek.

Met behulp van dit uitwerkingenboek kunnen grote delen van het theorieboek zelfstandig worden bestudeerd.

Uiteraard heeft het bestuderen van een uitwerking alleen zin als je zelf aan de opgave hebt gewerkt. In het theorieboek is van de meeste opgaven een antwoord opgenomen, zodat je daar direct kunt zien of je de opgave goed hebt gemaakt.

Het is echter verstandig om na het maken van een serie opgaven ook nog eens in dit uitwerkingenboek te bekijken of jouw aanpak strookt met de aanpak die de auteur voor ogen heeft.

Opmerkingen en verdere vragen over een uitwerking kun je rechtstreeks richten aan *anne.kaldewaij@me.com* of aan *info@syntaxmedia.nl*.

voorjaar 2019

dr. Anne Kaldewaij

Voor cirkel c_2 geldt:

$$
\begin{aligned}
& x^2+y^2-2x+4y+1=0 \quad \{\text{kwadraatafsplisen}\} \\
\Leftrightarrow\ & (x-1)^2-1\ +\ (y+2)^2-4\ +\ 1=0 \\
\Leftrightarrow\ & (x-1)^2\ +\ (y+2)^2=4
\end{aligned}
$$

Dus het middelpunt van c_2 is $(1,-2)$ en de straal is 2.
De afstand tussen de middelpunten is $\sqrt{(4-1)^2+(3--2)^2}=\sqrt{34}$.
De stralen zijn samen $1+2=3$, dus de afstand tussen de cirkels is $\sqrt{34}-3\approx 2{,}83$.

5. Schrijf $(x-4)^2+(y-2)^2=100$ als $x^2+y^2-8x-4y+16+4-100=0$, dus $x^2+y^2-8x-4y-80=0$. Snijden met $x^2+y^2+12x+6y+20=0$ geeft als stelsel vergelijkingen:

$$
\begin{cases}
x^2+y^2+12x+6y+20=0 \\
x^2+y^2\ -\ 8x-4y-80=0
\end{cases}
$$

Aftrekken van de vergelijkingen levert $20x+10y+100=0$, ofwel $2x+y+10=0$.
Dit is de vergelijking van de lijn door de snijpunten van c_1 en c_2.
Je kunt hieruit y vrij maken: $y=-2x-10$.
Substitutie van $y=-2x-10$ in $x^2+y^2-8x-4y-80=0$ levert:

$$
\begin{aligned}
& x^2+(-2x-10)^2-8x-4(-2x-10)-80=0 \\
\Leftrightarrow\ & x^2+4x^2+40x+100-8x+8x+40-80=0 \\
\Leftrightarrow\ & 5x^2+40x+60=0 \\
\Leftrightarrow\ & x^2+8x+12=0 \\
\Leftrightarrow\ & (x+2)(x+6)=0 \\
\Leftrightarrow\ & x=-2\ \vee\ x=-6 \quad \{y=-2x-10\} \\
\Leftrightarrow\ & (x=-2\ \wedge\ y=-6)\ \vee\ (x=-6\ \wedge\ y=2)
\end{aligned}
$$

De snijpunten zijn dus $(-2,-6)$ en $(-6,2)$.

1.8.1 Gemengde opgaven

1.a. Lijn ℓ gaat door de punten $A(2,1)$ en $B(-2,-3)$.

Een richtingsvector is $\begin{pmatrix} -2-2 \\ -3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$ en dus ook $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Een steunvector is $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en dit geeft vectorvoorstelling $\ell\colon\ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1.b. Een normaal van $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ is $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, dus een normaalvergelijking is $x - y = c$.

Punt $A(2,1)$ invullen geeft $c = 1$ met resultaat $\ell\colon x - y = 1$.

1.c. $d(O, x - y = 1) = \dfrac{|1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \approx 0{,}71$.

1.d. k loodrecht op ℓ heeft normaal $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en gaat door $(0,0)$, dus $k\colon x + y = 0$.

1.e. $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$ heeft oplossing $S = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ en $|\overrightarrow{OS}| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \approx 0{,}71$.

2. Lijn $x - 2y = 8$ heeft normaal $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ en $2x + 3y = 71$ heeft normaal $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Voor de hoek ϕ hiertussen geldt $\cos\phi = \dfrac{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right|} = \dfrac{2-6}{\sqrt{5}\sqrt{13}}$.

Dus $\phi = \boxed{\cos^{-1}}(\dfrac{-4}{\sqrt{65}}) \approx 119{,}7°$.

De *scherpe* hoek tussen deze lijnen is $180° - 119{,}7° = 60{,}3°$.

3.7.1 Gemengde opgaven

1.a. $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; |\mathbf{a}| = \sqrt{16+1+4+4} = \sqrt{25} = 5$. Dus $\hat{\mathbf{a}} = \frac{1}{5}\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0\ 8 \\ 0{,}2 \\ 0{,}4 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$.

1.b. $\mathbf{b} = 8\hat{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 6{,}4 \\ 1{,}6 \\ 3{,}2 \\ 3{,}2 \end{pmatrix}$ 1.c. $\mathbf{c} = -\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -6{,}4 \\ -1{,}6 \\ -3{,}2 \\ -3{,}2 \end{pmatrix}$

2.a. $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ en H is het hypervlak $x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 0$. Dan is $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ een normaal van H. De projectie van $\mathbf{a}$ op $\mathbf{n}$ is:

$$\mathbf{a}_2 = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\mathbf{n} = \frac{1+2-9+12}{1+1+9+9}\,\mathbf{n} = 0{,}3\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}3 \\ -0{,}9 \\ 0{,}9 \end{pmatrix} \text{ en dan is } \mathbf{a}_1 = \mathbf{a} - \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0{,}7 \\ 1{,}7 \\ 3{,}9 \\ 3{,}1 \end{pmatrix}.$$

Dus de ontbinding is:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}7 \\ 1{,}7 \\ 3{,}9 \\ 3{,}1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}3 \\ -0{,}9 \\ 0{,}9 \end{pmatrix} \text{ (Eerste in } H\text{, tweede loodrecht op } H.\text{)}$$

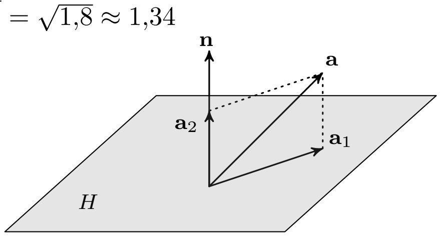
2.b. Met de afstandsformule vind je voor $A(1,2,3,4)$:

$$d(A,H) = \frac{|1\cdot1 + 1\cdot2 - 3\cdot3 + 3\cdot4 - 0|}{\sqrt{1+1+9+9}} = \frac{6}{\sqrt{20}} \approx 1{,}34$$

Uit de ontbinding van $\mathbf{a}$ (zie de figuur) volgt:

$$d(A,H) = |\mathbf{a}_2| = \sqrt{0{,}3^2 + 0{,}3^2 + 0{,}9^2 + 0{,}9^2} = \sqrt{1{,}8} \approx 1{,}34$$

Deze waarden stemmen overeen.



3.a. De hypervlakken H_1: $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5$ en H_2: $2x_1 + x_2 + x_4 = 7$ hebben respectieve normalen:

$$\mathbf{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en } \mathbf{n}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Voor de hoek ϕ daartussen geldt:

$$\cos\phi = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|} = \frac{2+2+0+0}{\sqrt{1+4+9+0} \cdot \sqrt{4+1+0+1}} = \frac{4}{\sqrt{14}\sqrt{6}}$$

Dus $\phi = \boxed{\cos^{-1}}(\frac{4}{\sqrt{14}\sqrt{6}}) \approx 64{,}12°$.

3.b. Indien dit hypervlakken zijn in $\mathbb{R}^5$, dan maken ze dezelfde hoek.
De normalen zijn in dat geval namelijk:

$$\mathbf{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en } \mathbf{n}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

en dat maakt voor de berekeningen niets uit. In het algemeen geldt bij het bepalen van de hoek tussen hypervlakken, dat je je niet hoeft te bekommeren over de dimensie van de ruimte waarbinnen deze hypervlakken liggen.

4.a. $$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -\mathbf{1} & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2r_3 \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -\mathbf{1} & 2 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3+6 = 3$$

4.b. $$\begin{vmatrix} 7 & 9 & 8 \\ -3 & 11 & 8 \\ 8 & 5 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -r_1 \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 7 & 9 & 8 \\ -10 & 2 & 0 \\ 8 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -(-10)\begin{vmatrix} 9 & 8 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 8 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= 10(27-40) + 2(21-64) = -130 - 86 = -216$$

4.c. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 4 & 8 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \div 2 \\ \\ \end{matrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 8 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 = 0 \text{ (twee gelijke rijen)}$$

4.4.1 Gemengde opgaven

1.a. $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 8 & 9 & 1 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +r_1 \\ +r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 9 \\ 9 & 12 & 0 & 12 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -3r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -15 \end{array}\right)$$

De laatste vergelijking is $0 = -15$, dus het stelsel is strijdig (geen oplossingen).

1.b. $$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{l} +2r_2 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & 0 & 23 \\ -1 & 1 & 2 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & 0 & 23 \\ -5 & 5 & 10 & 45 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -r_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & 0 & 23 \\ -5 & 0 & 10 & 22 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 4{,}6 \\ -1 & 0 & 2 & 4{,}4 \end{array}\right)$$

Dus $y = 4{,}6$ en $-x + 2z = 4{,}4$. Neem $z = \lambda$, dan is $x = -4{,}4 + 2\lambda$.

De oplossing is: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4{,}4 + 2\lambda \\ 4{,}6 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4{,}4 \\ 4{,}6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. $$\begin{cases} (ms^2 + 2k)x - ky = ms \\ -kx + (ms^2 + 2k)y = ms \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} ms^2 + 2k & -k \\ -k & ms^2 + 2k \end{vmatrix} = (ms^2 + 2k)^2 - k^2 = (ms^2 + 2k - k)(ms^2 + 2k + k)$$
$$= (ms^2 + k)(ms^2 + 3k)$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} ms & -k \\ ms & ms^2 + 2k \end{vmatrix} = ms(ms^2 + 2k) + msk = ms(ms^2 + 3k)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} ms^2 + 2k & ms \\ -k & ms \end{vmatrix} = ms(ms^2 + 2k) + msk = ms(ms^2 + 3k)$$

Dus $x = y = \dfrac{ms(ms^2 + 3k)}{(ms^2 + k)(ms^2 + 3k)} = \dfrac{ms}{ms^2 + k}$.

Een voorwaarde bij de laatste stap is $ms^2 + 3k \neq 0$.

Hieraan is voldaan omdat $m > 0$ en $k > 0$.

3. De vraag is of een vector $\mathbf{x}$, met $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, bestaat, die loodrecht staat op de drie vectoren $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Je kunt dit op verschillende manieren aanpakken. We geven er drie:

1. $\mathbf{x}$ staat loodrecht op deze drie vectoren als het inproduct met elke vector hiervan 0 is. Dat geeft het stelsel $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 0 \\ 7x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 9x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$
Los je dit stelsel op dan vind je $x = 0$, $y = 0$ en $z = 0$ als enige oplossing.

2. Zo'n vector bestaat als deze drie vectoren in één vlak liggen, dus als de determinant van deze vectoren 0 is.
Berekenen geeft: $\begin{vmatrix} -1 & 7 & 2 \\ 3 & 4 & 9 \\ 8 & 2 & 9 \end{vmatrix} = 245 \neq 0$. Dus de drie vectoren liggen niet in één vlak. Dan bestaat er geen vector $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ die loodrecht op alle drie de vectoren staat.

3. Een vector loodrecht op twee van deze vectoren is een veelvoud van het uitproduct daarvan. Als dit uitproduct ook loodrecht op de derde vector staat, dan is dit uitproduct een oplossing van het probleem.

Nu is $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26 \\ 58 \\ -25 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} -26 \\ 58 \\ -25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} = 245 \neq 0$.

Dus is er geen vector die loodrecht staat op deze drie vectoren.

4.a. Het stelsel $\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ x - ay + 3z = 4 \end{cases}$ precies één oplossing als $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -a & 3 \end{vmatrix} \neq 0$.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -a & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ +r_1 \\ +3r_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 7 & 9-a & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 9-a \end{vmatrix} = -(27 - 3a - 14) = 3a - 13$$

$3a - 13 = 0 \Rightarrow a = \dfrac{13}{3} = 4\frac{1}{3}$, dus als $a \neq 4\frac{1}{3}$ heeft het stelsel precies één oplossing.

Eigenvector bij $\lambda_1 = 1$ volgt uit $\left(\begin{array}{cc|c} -0{,}02 & 0{,}05 & 0 \\ 0{,}02 & -0{,}05 & 0 \end{array}\right)$ met oplossing $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Eigenvector bij $\lambda_2 = 0{,}93$ volgt uit $\left(\begin{array}{cc|c} 0{,}05 & 0{,}05 & 0 \\ 0{,}02 & 0{,}02 & 0 \end{array}\right)$ met oplossing $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dit levert $V = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ bij diagonaalmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}93 \end{pmatrix}$.

De determinant van V is 7 en dat geeft $V^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Dus een eigenwaarde-decompositie is (met de factor $\frac{1}{7}$ vooraan):

$$A = \tfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}93 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Dus } A^n = \tfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}93^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2{\cdot}0{,}93^n & 5{\cdot}0{,}93^n \end{pmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 5 + 2{\cdot}0{,}93^n & 5 - 5{\cdot}0{,}93^n \\ 2 - 2{\cdot}0{,}93^n & 2 + 5{\cdot}0{,}93^n \end{pmatrix}$$

De beginwaarden zijn $x_0 = 400$ en $y_0 = 500$, dus:

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} 400 \\ 500 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 5 + 2{\cdot}0{,}93^n & 5 - 5{\cdot}0{,}93^n \\ 2 - 2{\cdot}0{,}93^n & 2 + 5{\cdot}0{,}93^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 400 \\ 500 \end{pmatrix}$$

Dus geldt:

$$x_n = \tfrac{1}{7}(2000 + 800{\cdot}0{,}93^n + 2500 - 2500{\cdot}0{,}93^n) = \tfrac{1}{7}(4500 - 1700{\cdot}0{,}93^n)$$
$$y_n = \tfrac{1}{7}(800 - 800{\cdot}0{,}93^n + 1000 + 2500{\cdot}0{,}93^n) = \tfrac{1}{7}(1800 + 1700{\cdot}0{,}93^n)$$

Na 24 uur is er $x_{24} = \frac{1}{7}(4500 - 1700(0{,}93)^{24}) \approx 600$ liter in V.

1.b. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{7}(4500 - 1700{\cdot}0{,}93^n) = \frac{1}{7}(4500 - 0) = \dfrac{4500}{7} \approx 643$ liter.

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{7}(1800 + 1700{\cdot}0{,}93^n) = \frac{1}{7}(1800 - 0) = \dfrac{1800}{7} \approx 257$ liter.

Samen is dit de oorspronkelijke gezamenlijke $400 + 500 = 900$ liter.

Of als berekening:

$$\lim_{n\to\infty} A^n = \tfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ en } \tfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 400 \\ 500 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 4500 \\ 1800 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 643 \\ 257 \end{pmatrix}$$

2.a. In elke fase (I, II en III) gaat $\frac{2}{3}$ van de producten door naar de volgende fase en gaat $\frac{1}{3}$ van de producten opnieuw naar dezelfde fase.

Nieuw aangevoerde smartphones tellen niet mee. Dan geldt dus:

$$x_2 = \tfrac{1}{3}x_1$$
$$y_2 = \tfrac{2}{3}x_1 + \tfrac{1}{3}y_1$$
$$z_2 = \tfrac{2}{3}y_1 + \tfrac{1}{3}z_1$$

Je kunt dit schrijven als $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ met $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

2.b. $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & 0 \\ \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & 0 \\ \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{27} & 0 & 0 \\ \frac{6}{27} & \frac{1}{27} & 0 \\ \frac{12}{27} & \frac{6}{27} & \frac{1}{27} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{27} & 0 & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{27} & 0 \\ \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{27} \end{pmatrix}$$

Uit $A^3 \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{27} & 0 & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{27} & 0 \\ \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{27} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{27}a \\ \frac{2}{9}a \\ \frac{4}{9}a \end{pmatrix}$ volgt dat op de vierde dag van deze a smartphones nog $\frac{1}{27}a$ in fase I zijn, $\frac{2}{9}a$ in fase II en $\frac{4}{9}a$ in fase III.

2.c. Uit 2.b. volgt dat op dag vier nog $\frac{1}{27} + \frac{2}{9} + \frac{4}{9} = \frac{19}{27}$ deel in onderhoud is.

Dus is $\frac{8}{27} = 29{,}6\,\%$ gereed.

2.a. $\mathbf{F}$ is gericht naar de oorsprong, dus heeft in (x, y) richting $-\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$.

De grootte van $\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$ is $\sqrt{x^2 + y^2}$ en dit is de afstand van (x, y) tot O.

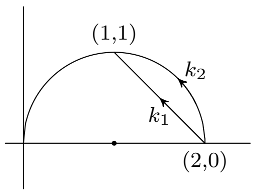
De grootte van $\mathbf{F}$ is omgekeerd evenredig met deze afstand tot O.

Nu is $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} = \dfrac{\left|\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}\right|}{x^2 + y^2}$.

Dus vector $\begin{pmatrix} -\dfrac{x}{x^2 + y^2} \\ -\dfrac{y}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}$ is gericht naar de oorsprong en heeft lengte $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

$\mathbf{F}$ is een veelvoud hiervan, dus $\mathbf{F} = c \begin{pmatrix} \dfrac{x}{x^2 + y^2} \\ \dfrac{y}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}$ met c een negatieve constante.

2.b. Kromme k_1 heeft parametrisering $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 2 - t \\ t \end{pmatrix}$ met $0 \leq t \leq 1$.



Langs k_1 geldt: $\mathbf{F} = c \begin{pmatrix} \dfrac{2 - t}{(2 - t)^2 + t^2} \\ \dfrac{t}{(2 - t)^2 + t^2} \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \dfrac{2 - t}{2t^2 - 4t + 4} \\ \dfrac{t}{2t^2 - 4t + 4} \end{pmatrix}$

Met $\mathbf{r}' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ volgt $\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' = c \cdot \dfrac{-2 + t + t}{2t^2 - 4t + 4} = c \cdot \dfrac{2t - 2}{2t^2 - 4t + 4} = c \cdot \dfrac{t - 1}{t^2 - 2t + 2}$.

Dus $\int\limits_k \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int\limits_0^1 \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int\limits_0^1 \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' \mathrm{d}t = c \int\limits_0^1 \dfrac{t - 1}{t^2 - 2t + 2} \mathrm{d}t = c \left[\tfrac{1}{2} \ln |t^2 - 2t + 2| \right]_0^1$

$= \tfrac{1}{2} c (\ln 1 - \ln 2) = -\tfrac{1}{2} c \ln 2.$

2.c. Kromme k_2 heeft parametrisering $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 + \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ met $0 \leq t \leq \frac{1}{2}\pi$ (een deel van de cirkel met middelpunt $(1, 0)$).

Langs k_1 geldt: $\mathbf{F} = c \begin{pmatrix} \dfrac{1 + \cos t}{(1 + \cos t)^2 + \sin^2 t} \\ \dfrac{\sin t}{(1 + \cos t)^2 + \sin^2 t} \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \dfrac{1 + \cos t}{2 + 2\cos t} \\ \dfrac{\sin t}{2 + 2\cos t} \end{pmatrix}$

Met $\mathbf{r}' = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ en $\mathbf{F} = c \begin{pmatrix} \dfrac{1+\cos t}{2+2\cos t} \\ \dfrac{\sin t}{2+2\cos t} \end{pmatrix}$ volgt:

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{r}' = c\cdot\frac{-\sin t - \sin t\cos t + \sin t\cos t}{2+2\cos t} = c\cdot\frac{-\sin t}{2+2\cos t}$$

Dus $\int\limits_k \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}c \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \mathbf{F}\cdot\mathbf{r}'\mathrm{d}t = c\cdot \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \cdot\dfrac{-\sin t}{2+2\cos t}\mathrm{d}t = c\left[\frac{1}{2}\ln|2+2\cos t|\right]_0^{\frac{1}{2}\pi}$
$= \frac{1}{2}c(\ln 2 - \ln 4) = -\frac{1}{2}c\ln 2.$

Merk op dat beide routes dezelfde arbeid opleveren.

3.a. $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$ en k is het lijnstuk van $(1,1,0)$ naar $(1,1,1)$.

Een parametrisering van k is $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$ met $0 \le t \le 1$. Dan is $\mathbf{r}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Langs k geldt $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$, dus $\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}' = 1\cdot 0 + t\cdot 0 + 1\cdot 1 = 1$.

Dan is $\int\limits_k \mathbf{a}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \int\limits_0^1 1\mathrm{d}t = 1.$

3.b. $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$ en k is het lijnstuk van $(1,1,1)$ naar $(0,0,1)$.

Een parametrisering van k is $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1-t \\ 1-t \\ 1 \end{pmatrix}$ met $0 \le t \le 1$. Dan is $\mathbf{r}' = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Langs k geldt $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1-t \\ 1 \\ 1-t \end{pmatrix}$, dus $\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}' = (1-t)\cdot -1 + 1\cdot -1 + (1-t)\cdot 0 = t-2$.

Dan is $\int\limits_k \mathbf{a}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \int\limits_0^1 t - 2\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}t^2 - 2t\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 2 = -1\frac{1}{2}.$