Wiskunde voor bachelor en master

Wiskunde voor bachelor en master

Deel 6 Fouriertheorie met toepassingen

Uitwerkingen

Anne Kaldewaij

2024, Syntax Media, Amersfoort

ISBN 978 94 91764 58 5
NUR 123

Ontwerp omslag: Agraphics Design

Eindredactie: Redactie & zo, ir. Caroline van der Meulen

Vragen en opmerkingen over deze uitgave kunt u richten aan:

info@syntaxmedia.nl

www.syntaxmedia.nl

Het uitwerkingenboek

Dit uitwerkingenboek is een uniek hulpmiddel bij het boek *Fouriertheorie met toepassingen*. Het biedt van alle opgaven een uitwerking met waar nodig een afleiding, nadere toelichting of een grafiek.

Met behulp van dit uitwerkingenboek kunnen grote delen van het theorieboek zelfstandig worden bestudeerd.

Uiteraard heeft het bestuderen van een uitwerking alleen zin als je zelf aan de opgave hebt gewerkt. In het theorieboek is van de meeste opgaven een antwoord opgenomen, zodat je daar direct kunt zien of je de opgave goed hebt gemaakt.

Daarnaast is het verstandig om na het maken van een serie opgaven in dit uitwerkingenboek te bekijken of jouw aanpak strookt met de aanpak die de auteur voor ogen heeft.

Opmerkingen en verdere vragen over een uitwerking kun je rechtstreeks richten aan *anne.kaldewaij@me.com* of aan *info@syntaxmedia.nl*.

januari 2024

dr. Anne Kaldewaij

Inhoud

Uitwerkingen hoofdstuk 2

2.1.1 Opgaven

1. In deze opgave gebruik je dat $\sin \omega t$ en $\cos \omega t$ beide periode $\dfrac{2\pi}{\omega}$ hebben.

1.a. $100 \cos 20t$ heeft periode $\dfrac{2\pi}{20} = 0{,}1\pi$.

1.b. $\cos 4\pi t$ heeft periode $\dfrac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$.

1.c. $\sin(6t + 1)$ heeft periode $\dfrac{2\pi}{6} = \frac{1}{3}\pi$ en $\cos(2t + 2)$ heeft periode $\dfrac{2\pi}{2} = \pi$.
Hun som heeft dan periode π, de kleinste periode waar beide inpassen.

1.d. $4 \cos 6\pi t$ heeft periode $\dfrac{2\pi}{6\pi} = \frac{1}{3}$ en $3 \sin 4\pi t$ heeft periode $\dfrac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$.
Het kleinste gehele veelvoud van $\frac{1}{2}$ dat ook een geheel veelvoud is van $\frac{1}{3}$ is 1.
Dus het verschil $4 \cos 6\pi t - 3 \sin 4\pi t$ heeft periode 1.

2.a. Neem f en g even, dus $f(-x) = f(x)$ en $g(-x) = g(x)$. Dan geldt:
$(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f + g)(x)$, dus $f + g$ is even.
$(fg)(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)g(x) = (fg)(x)$, dus fg is even.

2.b. Neem f en g oneven, dus $f(-x) = -f(x)$ en $g(-x) = -g(x)$. Dan geldt:
$(f+g)(-x) = f(-x)+g(-x) = -f(x)-g(x) = -(f(x)+g(x)) = -(f+g)(x)$,
dus $f + g$ is oneven.

2.c. Neem f en g oneven, dus $f(-x) = -f(x)$ en $g(-x) = -g(x)$. Dan geldt:
$(fg)(-x) = f(-x)g(-x) = -f(x) \cdot -g(x) = f(x)g(x) = (fg)(x)$,
dus fg is even.

2.d. Neem f even, dan geldt $f(x) = f(-x)$.

Differentieer beide zijden van $f(x) = f(-x)$. De afgeleide van $f(x)$ is $f'(x)$ en de afgeleide van $f(-x)$ is, met de kettingregel, $f'(-x) \cdot -1 = -f'(-x)$.

Uit $f(x) = f(-x)$ volgt blijkbaar $f'(x) = -f'(-x)$. Dus $f'(-x) = -f'(x)$ en dat betekent f' is oneven.

3. f en g hebben periode T, dus voor elke t geldt: $f(t+T) = f(t)$ en $g(t+T) = g(t)$. Dan geldt ook voor elke t:

$$(f+g)(t+T) = f(t+T) + g(t+T) = f(t) + g(t) = (f+g)(t) \quad \text{en}$$
$$(fg)(t+T) = f(t+T)g(t+T) = f(t)g(t) = (fg)(t)$$

Dus $f+g$ en fg hebben ook periode T.

4.a. $\int_{-4}^{4} t^2\,\mathrm{d}t \quad (t^2 \text{ is even functie})$

$$= 2\int_0^4 t^2\,\mathrm{d}t = 2\left[\tfrac{1}{3}t^3\right]_0^4 = 2(\tfrac{1}{3}\cdot 4^3 - 0) = \frac{128}{3} = 42\tfrac{2}{3}$$

4.b. $\int_{-4}^{4} t^3\,\mathrm{d}t = 0 \quad (t^3 \text{ is oneven functie})$

4.c. $\int_{5\pi}^{7\pi} \cos t \sin t\,\mathrm{d}t \quad (\text{periode van } \sin t \cos t \text{ is } 2\pi)$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \cos t \sin t\,\mathrm{d}t = 0 \quad (\cos t \sin t \text{ is oneven functie})$$

4.d. $\int_{-1}^{1} (3t^2 - 4t^5)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} 3t^2\,\mathrm{d}t - \int_{-1}^{1} 4t^5\,\mathrm{d}t \quad (3t^2 \text{ is even en } 4t^5 \text{ is oneven})$

$$= 2\int_0^1 3t^2\,\mathrm{d}t - 0 = 2\left[t^3\right]_0^1 = 2$$

4.e. $\int_0^{2\pi} \sin 3t \cos 11t\,\mathrm{d}t \quad (\text{periode van } \sin 3t \cos 11t \text{ is } 2\pi)$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sin 3t \cos 11t\,\mathrm{d}t = 0 \quad (\text{want } \sin 3t \cos 11t \text{ is oneven functie})$$

4.f. $\int_0^2 (t-1)^3\,\mathrm{d}t \quad (\text{substitueer } \tau = t-1, \text{ grenzen worden } -1 \text{ en } 1\ )$

$$= \int_{-1}^{1} \tau^3\,\mathrm{d}\tau = 0 \quad (\text{want } \tau^3 \text{ is oneven functie})$$

Uitwerkingen hoofdstuk 3

3.1.2 Opgaven

1.a. $\mathrm{e}^{2\pi n \mathrm{j}} = \cos 2\pi n + \mathrm{j}\sin 2\pi n = 1 + 0 = 1$

$\mathrm{e}^{-2\pi n \mathrm{j}} = \cos(-2\pi n) + \mathrm{j}\sin(-2\pi n) = \cos 2\pi n + 0 = 1$

1.b. $\mathrm{e}^{\pi n \mathrm{j}} = \cos \pi n + \mathrm{j}\sin \pi n = (-1)^n + 0 = (-1)^n$

$\mathrm{e}^{-\pi n \mathrm{j}} = \cos(-\pi n) + \mathrm{j}\sin(-\pi n) = \cos \pi n + 0 = (-1)^n$

1.c. $\mathrm{e}^{(2n-1)\pi \mathrm{j}} = \mathrm{e}^{2\pi n} \cdot \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{j}} = 1 \cdot -1 = -1$

2.a. Uit $z\bar{z} = |z|^2$ (voorbeeld 7) volgt $z = \dfrac{|z|^2}{\bar{z}}$ en dus $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2} = \dfrac{1}{|z|^2}\,\bar{z}$.

2.b. Uit $\left\{\begin{array}{ccc} z & = & \mathrm{Re}(z) + \mathrm{j}\,\mathrm{Im}(z) \\ \bar{z} & = & \mathrm{Re}(z) - \mathrm{j}\,\mathrm{Im}(z) \end{array}\right.$

volgt door optellen: $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$, dus $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$

2.c. Met $\left\{\begin{array}{ccc} z & = & \mathrm{Re}(z) + \mathrm{j}\,\mathrm{Im}(z) \\ \bar{z} & = & \mathrm{Re}(z) - \mathrm{j}\,\mathrm{Im}(z) \end{array}\right.$ geeft bovenste min onderste: $z - \bar{z} = 2\mathrm{j}\,\mathrm{Im}(z)$,

dus $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{1}{2\mathrm{j}}(z - \bar{z}) = \dfrac{\mathrm{j}}{2\mathrm{j}^2}(z - \bar{z}) = -\frac{1}{2}\mathrm{j}(z - \bar{z})$.

3.a.
$$\begin{aligned}
\int_0^{4\frac{1}{2}\pi} \mathrm{e}^{-2\mathrm{j}nt}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{-2\mathrm{j}n}\left[\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}nt}\right]_0^{4\frac{1}{2}\pi} = \frac{1}{-2\mathrm{j}n}(\mathrm{e}^{-9n\pi\mathrm{j}} - \mathrm{e}^0) = \frac{1}{-2\mathrm{j}n}(\mathrm{e}^{-n\pi\mathrm{j}} - 1) \\
&= \frac{1}{-2\mathrm{j}n}((-1)^n - 1) \\
&= \frac{(-1)^n - 1}{2n}\mathrm{j} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{als } n \text{ even} \\ -\dfrac{1}{n}\mathrm{j} & \text{als } n \text{ oneven} \end{cases}
\end{aligned}$$

3.b. We berekenen deze integraal met partiële integratie door $\mathrm{e}^{-3n\mathrm{j}t}$ achter de d te brengen:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} t\mathrm{e}^{-3n\mathrm{j}t}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{-3n\mathrm{j}}\int_0^{2\pi} t\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{-3n\mathrm{j}t} \\
&= \frac{1}{-3n\mathrm{j}}\left[t\mathrm{e}^{-3n\mathrm{j}t}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{3n\mathrm{j}}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-3n\mathrm{j}t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{-3n\mathrm{j}}(2\pi\mathrm{e}^{-6\pi n\mathrm{j}} - 0) - \frac{1}{9n^2\mathrm{j}^2}\left[\mathrm{e}^{-3n\mathrm{j}t}\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{2\pi}{-3n\mathrm{j}} - \frac{1}{9n^2\mathrm{j}^2}(1-1) \\
&= \frac{2\pi}{3n}\mathrm{j}
\end{aligned}$$

3.c. $$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^t\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}nt}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{(1-2n\mathrm{j})t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1-2n\mathrm{j}}\left[\mathrm{e}^{(1-2n\mathrm{j})t}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{1-2n\mathrm{j}}(\mathrm{e}^{2\pi}\mathrm{e}^{-4\pi n\mathrm{j}} - \mathrm{e}^0) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{2\pi}-1}{1-2n\mathrm{j}} \qquad \text{(breng in de vorm } a+b\mathrm{j}) \\
&= \frac{(\mathrm{e}^{2\pi}-1)(1+2n\mathrm{j})}{(1-2n\mathrm{j})(1+2n\mathrm{j})} \\
&= \frac{(\mathrm{e}^{2\pi}-1)(1+2n\mathrm{j})}{1+4n^2} \\
&= \frac{(\mathrm{e}^{2\pi}-1)}{4n^2+1} + \frac{2n(\mathrm{e}^{2\pi}-1)}{4n^2+1}\mathrm{j}
\end{aligned}$$

(Uitgewerkt tot de vorm $a+b\mathrm{j}$.)

3.2.3 Opgaven

1.a. $f(t) = \begin{cases} -1 & \text{als } -1 < t < 0 \\ 1 & \text{als } \;\; 0 < t < 1 \end{cases}$ verder 2-periodiek, dus $T = 2$ en $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \pi$.

Dan is $c_0 = \frac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ (oneven functie) en voor $n \geq 1$ geldt:

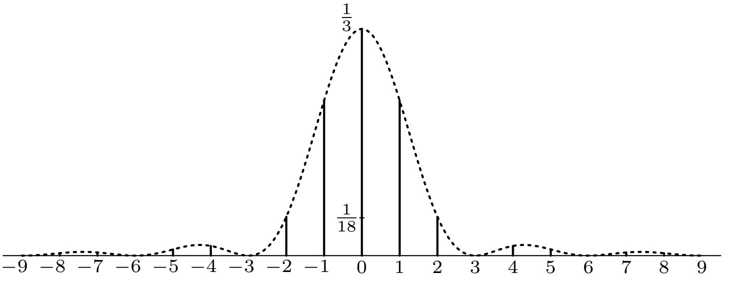
$$c_n = \frac{1}{T}\int_T f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega t}\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{0} -\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\pi t}\,\mathrm{d}t \;+\; \tfrac{1}{2}\int_0^{1} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\pi t}\,\mathrm{d}t$$

Uitwerkingen hoofdstuk 5

5.1.4 Opgaven

1. Op basis van $c_n = \frac{1}{3}\,\text{sinc}^2(\frac{1}{3}\pi n)$ wordt $y = \frac{1}{3}\,\text{sinc}^2(\frac{1}{3}\pi x)$ gestippeld getekend.

   Daarbij kiezen we de schaalverdeling op de verticale as zodanig dat $f(0) = \frac{1}{3}$ ongeveer 6 keer zo hoog ligt als de eenheid van de horizontale as. Vervolgens worden de verticale lijnen getekend vanaf -9 tot 9. Daarbuiten is $c_n \approx 0$.
   Dit resulteert in de onderstaande figuur.

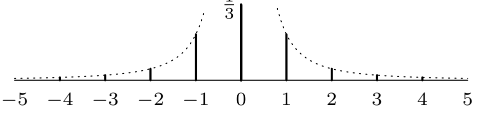


   Omdat alle c_n reëel zijn en niet negatief, is $\arg(c_n) = 0$ voor alle n.
   Dus bestaat het fasespectrum uit louter nullen.

2. De Fouriercoëfficiënten van signaal $h(t)$ zijn $c_0 = \frac{1}{3}$ en $c_n = \dfrac{2(-1)^n}{n^2\pi^2}$.

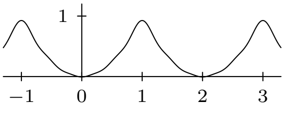
   Dus geldt voor $n \geq 1$ dat $|c_n| = \dfrac{2}{n^2\pi^2}$.

   Het amplitudespectrum staat hiernaast.



   $|c_n|$ is van de orde $\dfrac{1}{n^2}$, dus de reeks convergeert snel.

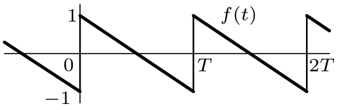
   Hiernaast staat de som van de eerste 6 termen van de reeks.



   Op $t = 1$, waar de grafiek van $h(t)$ een scherpe hoek maakt, is de waarde bij deze benadering 0,93 en er zijn nog veel termen nodig om bij 0,99 te komen. Bij hoeken in grafieken zijn altijd hoge frequenties nodig voor een goede benadering.

3.a. Het signaal is oneven, dus een sinusreeks.

Die is van de vorm $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$ met $b_n \geq 0$, want de grafiek past op $[0, T]$ bij de sinusvorm.



Dan is $c_n = -\frac{1}{2}\mathrm{j}b_n = \frac{1}{2}b_n \cdot -\mathrm{j} = \frac{1}{2}b_n \,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\pi\mathrm{j}}$.

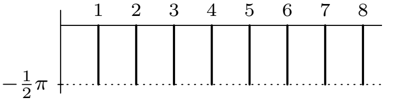
Of je gebruikt opgave 1.a. van paragraaf 4.4, waarin een Fourierreeks is afgeleid voor een signaal dat de helft is van dit signaal. Dan heb je c_n expliciet:

$$c_n = 2\cdot -\frac{1}{2\pi n}\mathrm{j} = \frac{-\mathrm{j}}{\pi n} = \frac{1}{\pi n}\cdot -\mathrm{j} = \frac{1}{\pi n}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\pi\mathrm{j}}$$

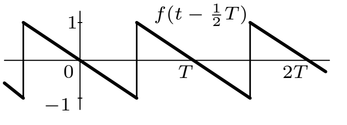
Het gaat erom dat c_n het product is van een positief getal en $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\pi\mathrm{j}}$ en dus geldt voor elke n:

$$\arg(c_n) = -\tfrac{1}{2}\pi$$

Het fasespectrum is hiernaast afgebeeld.



3.b. De grafiek van $f(t - \frac{1}{2}T)$ is hiernaast getekend. (De originele grafiek een $\frac{1}{2}T$ naar rechts.)



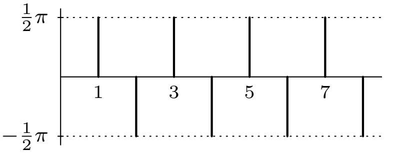
Er geldt $\omega\tau = \omega\cdot\frac{1}{2}T = \dfrac{2\pi}{T}\cdot\frac{1}{2}T = \pi$, dus:

$$\arg(c_n) - n\omega\tau = -\tfrac{1}{2}\pi - n\pi \text{ (modulo } 2\pi)$$

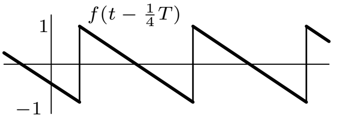
Voor $n = 2k$ is dit $-\frac{1}{2}\pi - 2k\pi = -\frac{1}{2}\pi$

Voor $n = 2k + 1$:
$-\frac{1}{2}\pi - (2k+1)\pi = -1\frac{1}{2}\pi - 2k\pi = \frac{1}{2}\pi$

Zie de grafiek hiernaast.



3.c. De grafiek van $f(t - \frac{1}{4}T)$ is hiernaast getekend. (De originele grafiek een $\frac{1}{4}T$ naar rechts.)



Er geldt $\omega\tau = \omega\cdot\frac{1}{4}T = \dfrac{2\pi}{T}\cdot\frac{1}{4}T = \frac{1}{2}\pi$, dus:

$$\arg(c_n) - n\omega\tau = -\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}n\pi \text{ (modulo } 2\pi)$$

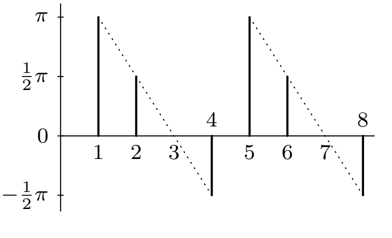
Voor $n = 4k + 1$: $-\frac{1}{2}\pi - 2k\pi - \frac{1}{2}\pi = \pi$

Voor $n = 4k + 2$: $-\frac{1}{2}\pi - 2k\pi - \pi = \frac{1}{2}\pi$

Voor $n = 4k + 3$: $-\frac{1}{2}\pi - 2k\pi - 1\frac{1}{2}\pi = 0$

Voor $n = 4k + 4$: $-\frac{1}{2}\pi - 2k\pi - 1\frac{1}{2}\pi = -\frac{1}{2}\pi$

Zie de grafiek hiernaast.



Uitwerkingen hoofdstuk 7

7.2.1 Opgaven

1.a. Uit $f(t) = \dfrac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega$ volgt:

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{0}\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\,\mathrm{d}\omega$$

(Hierbij neem je voor $f(0)$ het gemiddelde van $f(0+)$ en $f(0-)$ als f een sprong maakt in 0.)

1.b. Voor $f(t) = \Lambda(t)$ is $f(0) = 1$ en $\hat{f}(\omega) = \mathrm{sinc}^2(\frac{1}{2}\omega)$. Toepassen van 1.a. levert:

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}^2(\tfrac{1}{2}\omega)\,\mathrm{d}\omega \text{ en dus } \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}^2(\tfrac{1}{2}\omega)\,\mathrm{d}\omega = 2\pi$$

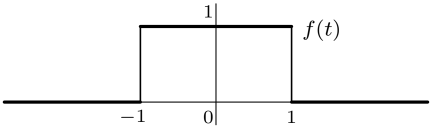
Substitutie van $\omega' = \frac{1}{2}\omega$ en dus $\omega = 2\omega'$ geeft $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}^2(\frac{1}{2}\omega)\,\mathrm{d}\omega = 2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}^2(\omega')\,\mathrm{d}\omega'$.

Dan is $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}^2(\omega')\,\mathrm{d}\omega' = \pi$. Omdat $\mathrm{sinc}^2(\omega)$ even is, volgt $\int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{sinc}^2(\omega)\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2}\pi$.

De naam van de integratievariabele doet er niet toe, dus ook $\int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{sinc}^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\pi$.

2. Functie f is gegeven door $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{als } -1 < t < 1 \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$.

Dan is $f(t) = \Pi(\frac{1}{2}t)$
(zie de figuur hiernaast).



Met de substitutie $\tau = \frac{1}{2}t$, dus $t = 2\tau$ vind je dan:

$$\hat{f}(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Pi(\tfrac{1}{2}t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t = 2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Pi(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\cdot 2\omega\tau}\mathrm{d}\tau = 2\,\widehat{\Pi}(2\omega) = 2\,\mathrm{sinc}\,(\omega)$$

3.a. $f(t) = u(t)\mathrm{e}^{-0{,}1t}$.

Omdat $u(t) = 0$ voor $t < 0$ is $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t$ gelijk aan $\int_{0}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t$. Dus:

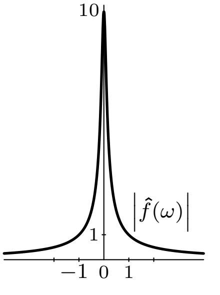
$$\hat{f}(\omega) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-0{,}1t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-0{,}1t-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{(-0{,}1-\mathrm{j}\omega)t}\mathrm{d}t = -\frac{1}{-0{,}1-\mathrm{j}\omega} = \frac{1}{0{,}1+\mathrm{j}\omega}$$

Bij $\int_0^\infty \mathrm{e}^{(-0{,}1-\mathrm{j}\omega)t}\mathrm{d}t = -\frac{1}{-0{,}1-\mathrm{j}\omega}$ is gebruikt dat $\mathrm{Re}(-0{,}1-\mathrm{j}\omega) = -0{,}1 < 0$.

3.b. $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{0{,}1+\mathrm{j}\omega}$.

Dus $\left|\hat{f}(\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{0{,}01+\omega^2}}$.

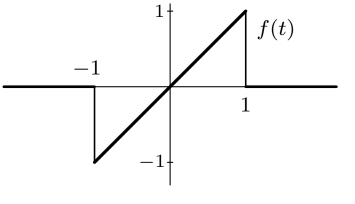
Het spectrum staat hiernaast.



4.a. $\Pi(\tfrac{1}{2}t) = \begin{cases} 1 & \text{als} \quad -1 < t < 1 \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$, dus $f(t) = t\cdot\Pi(\tfrac{1}{2}t)$ heeft functievoorschrift:

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{als} \quad -1 < t < 1 \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$

De grafiek van $f(t)$ staat hiernaast.



4.b. We berekenen $\hat{f}(\omega)$ met behulp van partiële integratie:

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \int_{-1}^{1} t\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t = \frac{1}{-\mathrm{j}\omega}\int_{-1}^{1} t\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t} = \frac{1}{-\mathrm{j}\omega}\left[t\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\right]_{t=-1}^{1} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega}\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{-\mathrm{j}\omega}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) + \frac{1}{\omega^2}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\right]_{t=-1}^{1} \\ &= \frac{2\mathrm{j}}{\omega}\cdot\tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) + \frac{2\mathrm{j}}{\omega^2}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}}{2\mathrm{j}} \\ &= \frac{2\mathrm{j}}{\omega}(\cos\omega - \frac{\sin\omega}{\omega}) = \frac{2\mathrm{j}}{\omega}(\cos\omega - \mathrm{sinc}\,\omega)\end{aligned}$$

Uitwerkingen hoofdstuk 9

9.2.1 Opgaven

1.a. De systeemfunctie is $H(\omega) = \mathrm{e}^{-3\mathrm{j}\omega}$, dus voor de systeemrespons $h(t)$ geldt:

$$\hat{h}(\omega) = \mathrm{e}^{-3\mathrm{j}\omega}$$

De tabel achterin geeft $h(t) = \delta_3(t)$ (ook genoteerd als $\delta(t-3)$).

1.b. De respons op $f(t)$ berekenen we met de convolutie-integraal en de zeefeigenschap van paragraaf 4.2.1:

$$f * h = f * \delta_3 = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta_3(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = f(t-3)$$

omdat $t - \tau = 3$ als $\tau = t - 3$.

1.c. De respons in het frequentiedomein is $\hat{f}(\omega)\cdot H(\omega) = \hat{f}(\omega)\,\mathrm{e}^{-3\mathrm{j}\omega}$.

De regel voor tijdverschuiving geeft $\quad f(t-3) \longrightarrow \hat{f}(\omega)\,\mathrm{e}^{-3\mathrm{j}\omega}$.

Dus de respons op $f(t)$ in het tijddomein is $f(t-3)$.

1.d. Het systeem geeft een vertraging van 3.

2.a. Uit $\cos(\omega t) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t})$ volgt als respons $\frac{1}{2}\big(H(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} + H(-\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\big)$.

2.b. Met $H(-\omega) = \overline{H(\omega)}$ kun je de respons schrijven als $\frac{1}{2}\Big(H(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} + \overline{H(\omega)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\Big)$.

Als $|H(\omega)| = A$ en $\arg H(\omega) = \phi$, dus $H(\omega) = A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}$, dan is $\overline{H(\omega)} = A\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi}$ en geldt:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\Big(H(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} + \overline{H(\omega)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\Big) &= \tfrac{1}{2}(A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} + A\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}) \\
&= A\cdot\tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\phi)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega t+\phi)}) \\
&= A\cdot\cos(\omega t + \phi) \\
&= |H(\omega)|\cos(\omega t + \arg H(\omega))
\end{aligned}$$

9.3.1 Opgaven

1. In de onderstaande figuren zijn drie gevallen weergegeven voor de positie van $\Pi(t-\tau)$ ten opzichte van $\Pi(\tau)$. Daarbij is met een dikke streep op de τ-as het overlappende gebied van de grafieken aangegeven.

   In de bovenste figuur is er geen overlappend gebied, want $t+\frac{1}{2} < -\frac{1}{2}$. Dan is de integraal 0. Dit geval kan worden geschreven als $t < -1$ en net zo levert de integraal voor $t > 1$ als antwoord 0 op.

   De tweede figuur geeft het geval $-\frac{1}{2} \leq t+\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$, ofwel $-1 \leq t \leq 0$. Dan geldt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Pi(\tau)\Pi(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} 1\,\mathrm{d}\tau = [\tau]_{-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} = t+\tfrac{1}{2}-(-\tfrac{1}{2}) = t+1$$

   De onderste figuur is het geval $-\frac{1}{2} \leq t-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$, ofwel $0 \leq t \leq 1$. Dan geldt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Pi(\tau)\Pi(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{t-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1\,\mathrm{d}\tau = [\tau]_{t-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}-(t-\tfrac{1}{2}) = -t+1$$

   Dus $(\Pi*\Pi)(t) = \begin{cases} t+1 & \text{als } -1 \leq t \leq 0 \\ -t+1 & \text{als } \quad 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$ en 0 elders, en dat is $\Lambda(t)$.