GERTJAN LAAN

LINEAIRE ALGEBRA

UITGEVERIJ CZARINA

Inhoudsopgave

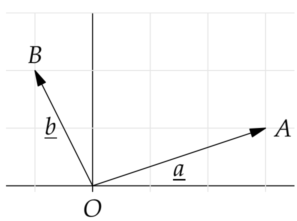
1

Vectoren

VECTOREN vormen de basis voor vectormeetkunde en lineaire algebra. Een vector is een object dat kan verwijzen naar een absolute positie, maar een vector kan ook een relatieve verplaatsing aangeven. Vectoren zijn dankzij deze tweeslachtigheid een krachtig hulpmiddel om berekeningen in het platte vlak en in de ruimte te doen. In dit hoofdstuk maak je kennis met vectoren en een groot aantal van hun eigenschappen.

1.1 Inleiding

Een leerling die voor het eerst met coördinaten te maken krijgt, leert de betekenis van $A(3, 1)$ door vanuit de oorsprong eerst drie naar rechts en vervolgens een omhoog te gaan. Dat is in essentie, althans voorlopig, wat een *vector* is. Het is gebruikelijk een vector te tekenen als een *pijl*. In figuur 1.1 zie je de vectoren $\overrightarrow{OA}$ en $\overrightarrow{OB}$.

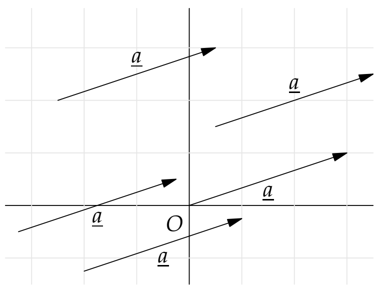


Figuur 1.1: Een vector die vanuit O een punt aanwijst heet de *plaatsvector* van dat punt.

We noteren: $\overrightarrow{OA} = \binom{3}{1}$, vanuit de oorsprong drie naar rechts en een omhoog. De vector $\binom{3}{1}$ wijst het punt $A(3, 1)$ aan. De getallen waarmee je de vector noteert heten de *kentallen* of *componenten* van die vector. De vector $\binom{-1}{2}$ wijst het punt B aan.

De vectoren $\overrightarrow{OA}$ en $\overrightarrow{OB}$ heten *plaatsvectoren*, omdat ze vanuit de oorsprong de plaats van een punt, in dit geval het punt A of B, aanwijzen.

Een vector als $\binom{3}{1}$ hoeft niet per se in de oorsprong te beginnen, hij kan zich vrij bewegen, het is een zogeheten *vrije vector*, zie figuur 1.2.



Figuur 1.2: Vrije vector $\underline{a}$

Omdat een vector zich vrij kan bewegen, is het vaak handiger hem niet naar zijn begin- en eindpunt te noemen, maar hem een andersoortige naam te geven. De naam van een vector bestaat meestal uit één letter, zoals **a**. In de literatuur zijn verschillende notaties in omloop om vectoren te kunnen onderscheiden van andere grootheden. Dit zijn een paar van die notaties:

- vetgedrukt: **a**
- met een pijltje of met een harpoenhaakje erboven: $\overrightarrow{a}$ of $\overharpoon{a}$
- met een streepje erboven of eronder: $\overline{a}$ of $\underline{a}$

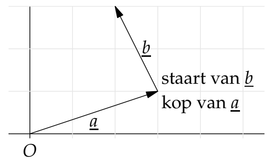
Typografisch is vetgedrukt waarschijnlijk het mooist, maar in handgeschreven tekst is vet moeilijk van normaal schrift te onderscheiden. Ik kies daarom voor een notatie die makkelijk schrijft: $\underline{a}$.

1.2 *Vectoren optellen*

Als de vector $\underline{a} = \binom{3}{1}$ drie naar rechts en een omhoog betekent, en dus $\underline{b} = \binom{-1}{2}$ een naar links en twee omhoog, en je voert dit achter elkaar uit, dan ben je per saldo twee naar rechts opgeschoten, en drie naar boven. Dit kun je noteren als de som van twee vectoren:

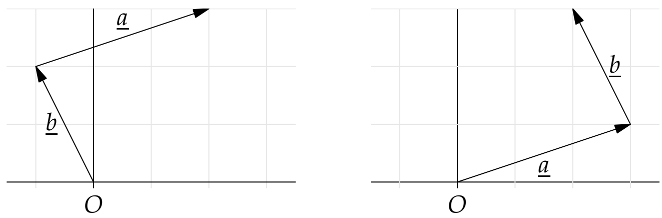
$$\underline{a} + \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Bij het tekenen van de som $\underline{a} + \underline{b}$ leg je de vectoren 'kop aan staart', zoals in figuur 1.3.



Figuur 1.3: Het optellen van twee vectoren doe je meetkundig door de vectoren met hun kop en staart achter elkaar te leggen. Deze manier wordt wel de kop-staartmethode genoemd.

De volgorde waarin je optelt maakt niet uit, met $\underline{a} + \underline{b}$ kom je in hetzelfde punt uit als met $\underline{b} + \underline{a}$, zoals je in figuur 1.4 kunt zien. De berekening $\underline{b} + \underline{a} = \binom{-1}{2} + \binom{3}{1} = \binom{2}{3}$ bevestig dat.



(a) $\underline{b} + \underline{a}$

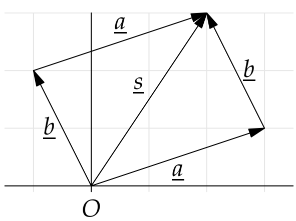
(b) $\underline{a} + \underline{b}$

Figuur 1.4: Optellen van vectoren is commutatief

De som van twee vectoren is dus opnieuw een vector, in dit voorbeeld de vector $\underline{s} = \binom{2}{3}$, en de optelling is *commutatief*:

$$\underline{a} + \underline{b} = \underline{s} = \underline{b} + \underline{a} \tag{1.1}$$

De commutativiteit kun je ook laten zien in één tekening, zoals in figuur 1.5.



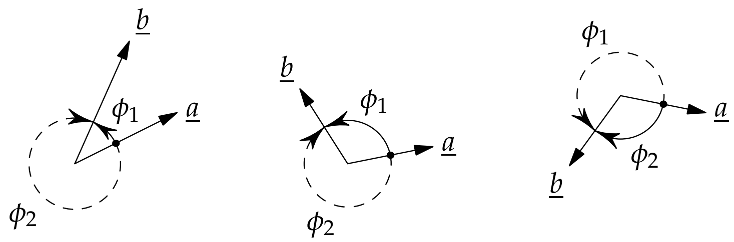
Figuur 1.5: $\underline{s} = \underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$, de vectoren vormen een parallellogram waarvan $\underline{s}$ de diagonaal is. Deze tekening wordt vaak de *parallellogramconstructie* van de som van twee vectoren genoemd

Samengevat: het optellen van vectoren doe je als volgt:

- meetkundig door het achter elkaar leggen van de pijlen: de kop-staartmethode of de parallellogramconstructie
- algebraïsch door het componentsgewijs optellen van de kentallen

3.4 De hoek tussen twee vectoren

Voor het vastleggen van de hoek ϕ tussen twee vectoren $\underline{a}$ en $\underline{b}$ heb je in principe verschillende mogelijkheden: je kunt de hoek meten van $\underline{a}$ naar $\underline{b}$ tegen de klok in (ϕ_1), of met de klok mee (ϕ_2). Zie figuur 3.2.



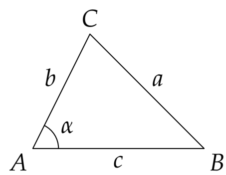
Figuur 3.2: De hoek van $\underline{a}$ naar $\underline{b}$ is de kleinste van ϕ_1 of ϕ_2

In het algemeen is een van beide hoeken de kleinste van de twee (behalve als de vectoren gelijke of tegengestelde richting hebben), we spreken af dat *de* hoek tussen de vectoren de hoek is met een waarde tussen 0° en 180°, of in radialen:

$$0 \leq \phi \leq \pi$$

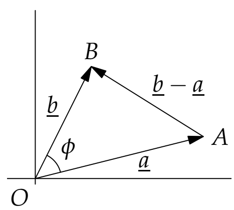
Met behulp van de *cosinusregel* kun je een formule afleiden voor de hoek tussen twee gegeven vectoren. De cosinusregel voor een willekeurige driehoek ABC luidt:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \tag{3.3}$$



Figuur 3.3: De cosinusregel: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

Met twee gegeven vectoren $\underline{a} = \overrightarrow{OA}$ en $\underline{b} = \overrightarrow{OB}$ kun je driehoek OAB maken, als in figuur 3.4.



Figuur 3.4: Pas de cosinusregel toe op driehoek OAB

Als je de cosinusregel toepast op deze driehoek, krijg je:

$$|\underline{b} - \underline{a}| = |\underline{a}|^2 + |\underline{b}|^2 - 2\,|\underline{a}|\,|\underline{b}|\cos\phi$$

Met de formule voor de lengte van vector $|\underline{b} - \underline{a}|$ uit de vorige paragraaf levert dit:

$$(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 = (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - 2\,|\underline{a}|\,|\underline{b}|\cos\phi$$

Wanneer je links de haakjes uitwerkt, en de gemeenschappelijke termen links en rechts weglaat, houd je de volgende gelijkheid over:

$$-2a_1b_1 - 2a_2b_2 = -2\,|\underline{a}|\,|\underline{b}|\cos\phi$$

Hieruit volgt:

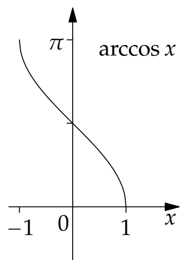
$$a_1b_1 + a_2b_2 = |\underline{a}|\,|\underline{b}|\cos\phi \tag{3.4}$$

En ook:

$$\cos\phi = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{|\underline{a}|\,|\underline{b}|}, \qquad |\underline{a}|\,,\,|\underline{b}| \neq 0 \tag{3.5}$$

Je kunt de hoek ϕ tussen twee vectoren $\underline{a}$ en $\underline{b}$ dus berekenen met behulp van de inverse cosinus, dat wil zeggen:

$$\phi = \arccos\left(\frac{a_1b_1 + a_2b_2}{|\underline{a}|\,|\underline{b}|}\right) \tag{3.6}$$



Figuur 3.5: De grafiek van de inverse cosinus. Merk op dat alle functiewaarden tussen 0 en π liggen, precies als nodig is voor de hoek tussen twee vectoren

In figuur 3.5 zie je de grafiek van $\arccos x$.

Voorbeeld 3.3. Bepaal de hoek tussen de vectoren $\underline{a} = \binom{-1}{3}$ en $\underline{b} = \binom{5}{2}$.

Oplossing.
Er geldt: $a_1b_1 + a_2b_2 = -1\cdot 5 + 3\cdot 2 = 1$, en verder is
$|\underline{a}| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$ en $|\underline{b}| = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$.
Volgens (3.5) geldt: $\cos\phi = \dfrac{1}{\sqrt{10}\sqrt{29}}$, dus $\phi = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{290}}$.

Met de rekenmachine volgt $\phi = 1.512$ rad, of 86.6° ▲

3.5 *Opgaven*

25. Bereken de hoeken tussen de volgende tweetallen vectoren $\underline{a}$ en $\underline{b}$ (rond af op hele graden).

 a. $\binom{3}{4}$ en $\binom{12}{-5}$
 b. $\binom{2}{3}$ en $\binom{5}{1}$
 c. $\binom{2}{1}$ en $\binom{1}{-7}$

26. Teken de vectoren $\underline{a} = \binom{-2}{1}$, $\underline{b} = \binom{4}{-2}$ en $\underline{c} = \binom{2}{-1}$. Geef een schatting voor $\angle(\underline{a},\underline{b})$ en $\angle(\underline{b},\underline{c})$, en bereken deze hoeken.

3.6 Het inproduct

De uitdrukking $a_1b_1 + a_2b_2$ die in formule (3.5) voorkomt, is zo belangrijk dat hij een eigen naam heeft: het *inwendig product* of kortweg: *inproduct*.

Definitie 3.4. Het inproduct $\underline{a} \cdot \underline{b}$ van twee vectoren, zeg $\underline{a} = \binom{a_1}{a_2}$ en $\underline{b} = \binom{b_1}{b_2}$, wordt gedefinieerd door:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b2 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2$$

■

In plaats van de notatie $\underline{a} \cdot \underline{b}$ is voor het inproduct ook de notatie met een dikke punt gebruikelijk, $\underline{a} \bullet \underline{b}$, waarschijnlijk om verwarring met de 'gewone' vermenigvuldiging tussen getallen te voorkomen. Tussen vectoren is echter geen gewone vermenigvuldiging gedefinieerd, dus duidt $\underline{a} \cdot \underline{b}$ vanzelf op het inproduct.

Voorbeeld 3.5. Bepaal het inproduct van $\binom{1}{2}$ en $\binom{3}{4}$.

Oplossing.
$\binom{1}{2} \cdot \binom{3}{4} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 11$ ▲

Voorbeeld 3.6. Bepaal het inproduct van $\underline{n} = \binom{a}{b}$ en $\underline{x} = \binom{x}{y}$.

Oplossing.
$\underline{n} \cdot \underline{x} = \binom{a}{b} \cdot \binom{x}{y} = ax + by$ ▲

Het inproduct is dus een bijzonder soort vermenigvuldiging tussen twee vectoren, en de uitkomst is een reëel getal.

Het inproduct heet soms *scalair product*, omdat de uitkomst een scalar (reëel getal) is. Niet te verwarren met de scalaire vermenigvuldig, zie paragraaf 1.5, waarvan de uitkomst een vector is.

Met behulp van het inproduct kun je (3.4) en (3.5) herschrijven tot:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}|\,|\underline{b}| \cos\phi \tag{3.7}$$

en

$$\cos\phi = \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}|\,|\underline{b}|}, \qquad |\underline{a}|\,, |\underline{b}| \neq 0 \tag{3.8}$$

Vaak komt het voor dat je moet nagaan of twee vectoren *loodrecht* op elkaar staan. Dat kan met het inproduct. Uit de uitdrukking $\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}|\,|\underline{b}| \cos\phi$ volgt:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = 0 \iff |\underline{a}| = 0 \vee |\underline{b}| = 0 \vee \cos\phi = 0 \tag{3.9}$$

$|\underline{a}| = 0$ of $|\underline{b}| = 0$ duidt erop dat $\underline{a}$ of $\underline{b}$ de nulvector is, dat zal meestal niet het geval zijn.

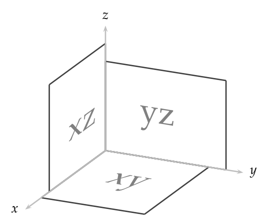
6

Vlakken: vectorvoorstelling

HET platte vlak, of $\mathbb{R}^2$, kent maar één vlak: zichzelf. De ruimte $\mathbb{R}^3$ daarentegen, kun je vullen met oneindig veel verschillende vlakken.

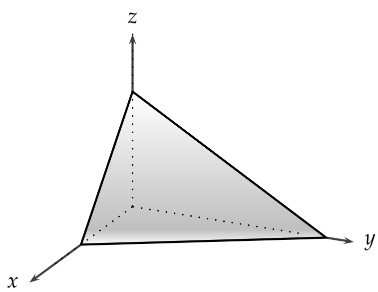
6.1 *Vlakken in* $\mathbb{R}^3$

In figuur 6.1 zie je drie vlakken in de ruimte getekend, gevormd door de assen: het grondvlak of het xy-vlak, het linker zijvlak of xz-vlak en het rechter zijvlak of yz-vlak. Deze vlakken heten de *coördinaatvlakken*. Om de vlakken zichtbaar te kunnen maken is er een kader omheen getekend, maar in feite zijn de vlakken oneindig groot, net zo onbegrensd als de assen, zowel in de positieve als in de negatieve richting.



Figuur 6.1: Een klein stukje van het positieve gedeelte van de drie coördinaatvlakken: het xy-, xz- en yz-vlak

De drie vlakken in figuur 6.1 zijn uiteraard niet de enige. Een kubus bijvoorbeeld heeft zes zijvlakken, die alle zes in principe onbegrensd zijn. Een vlak hoeft niet parallel te lopen aan een van de assen. In figuur 6.2 zie je een 'schuin' vlak getekend.



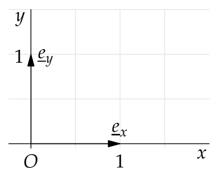
Figuur 6.2: De driehoek wordt gevormd door de snijlijnen van het vlak met de coördinaatvlakken

Ook dit vlak is onbegrensd, en loopt ver voorbij de getekende snijlijnen door die de driehoek vormen.

Elk vlak in de ruimte kun je vastleggen met een vectorvoorstelling, vergelijkbaar met die van een lijn. Om te begrijpen hoe dat kan, ga ik eerst terug naar de $\mathbb{R}^2$ om een paar begrippen te introduceren.

6.2 *Een basis voor* $\mathbb{R}^2$

De vectoren $\underline{e}_x = \binom{1}{0}$ en $\underline{e}_y = \binom{0}{1}$ in $\mathbb{R}^2$ wijzen beide in de richting van een van de assen, en ze hebben lengte 1. Ze heten *eenheidsvectoren*, zie figuur 6.3.



Figuur 6.3: De eenheidsvectoren van $\mathbb{R}^2$

Deze eenheidsvectoren hebben, dankzij de eigenschappen (1.1) tot en met (1.10) uit hoofdstuk 1, dus dankzij het feit dat $\mathbb{R}^2$ een vectorruimte is, een bijzondere eigenschap. Ze vormen een *basis* voor $\mathbb{R}^2$. Het zijn zogeheten *basisvectoren*. Wat wil dat zeggen?

Dat wil zeggen dat je elke vector uit $\mathbb{R}^2$ kunt maken met behulp van deze basisvectoren, via scalaire vermenigvuldiging en optellen van vectoren. Bijvoorbeeld:

$$\begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 8\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

of:

$$\begin{pmatrix}-10\\37\end{pmatrix} = -10\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 37\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

In het algemeen:
$$\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix} = p\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + q\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \tag{6.1}$$

Een uitdrukking als (6.1) heet een *lineaire combinatie* van $\binom{1}{0}$ en $\binom{0}{1}$.

Definitie 6.1. Een lineaire combinatie van twee vectoren $\underline{a}$ en $\underline{b}$ is een uitdrukking van de vorm $\lambda\underline{a} + \mu\underline{b}$, met $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. ∎

Als je alle mogelijke lineaire combinaties van de vectoren $\binom{1}{0}$ en $\binom{0}{1}$ opschrijft, krijg je *alle* vectoren van $\mathbb{R}^2$. We zeggen ook wel dat de vectoren $\binom{1}{0}$ en $\binom{0}{1}$ de $\mathbb{R}^2$ *voortbrengen*. Of korter: dat ze een basis vormen voor $\mathbb{R}^2$.

Het aardige is, dat de vectoren $\binom{1}{0}$ en $\binom{0}{1}$ niet de enige basis vormen. Je kunt ook een tweetal betrekkelijk willekeurige vectoren nemen, bijvoorbeeld $\binom{2}{5}$ en $\binom{1}{1}$.
Kun je nu $\binom{3}{8}$ ook als lineaire combinatie schrijven van deze twee?

Dan moet gelden:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Oftewel:

$$\begin{cases} 3 = 2\lambda + \mu \\ 8 = 5\lambda + \mu \end{cases}$$

Uit paragraaf 2.6 weet je dat dit stelsel precies één oplossing heeft als de determinant van het stelsel ongelijk aan nul is. De determinant is $2 \cdot 1 - 5 \cdot 1 = -3$. Inderdaad ongelijk aan nul.

Welke vector je in plaats van $\binom{3}{8}$ ook neemt, de determinant verandert niet van waarde.
En dus heeft het stelsel telkens een oplossing. Dus ook $\binom{-10}{37}$ en elke andere vector kun je als lineaire combinatie schrijven van $\binom{2}{5}$ en $\binom{1}{1}$.

Conclusie: de vectoren $\binom{2}{5}$ en $\binom{1}{1}$ vormen ook een basis voor $\mathbb{R}^2$.

In het algemeen geldt dat twee vectoren $\underline{a} = \binom{a_1}{a_2}$ en $\underline{b} = \binom{b_1}{b_2}$ een basis voor $\mathbb{R}^2$ vormen als je elke vector $\underline{v} = \binom{v_1}{v_2}$ kunt schrijven als lineaire combinatie van $\underline{a}$ en $\underline{b}$:

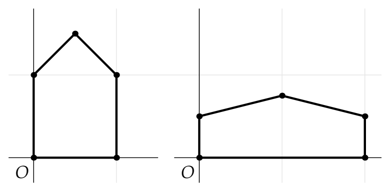
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

14.9 *Toepassing: computer graphics*

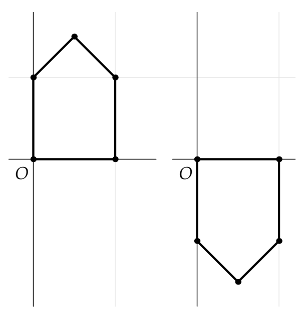
Computer graphics bestaan doorgaans uit bewegende objecten op een beeldscherm. Om als programmeur een object te laten bewegen, moet je het snel achter elkaar laten tekenen, eventueel vervormd of gedraaid of gespiegeld, en op verschillende plaatsen op het scherm. Zo'n scherm heeft een denkbeeldig assenstelsel, met de oorsprong meestal in de linker bovenhoek, en met de positieve y-as naar beneden gericht.

Elk beeldpunt (pixel) is via zijn x- en y-coördinaat bereikbaar en kun je aan- of uitzetten of een andere kleur geven. Aan dit alles zit (veel) rekenwerk vast, dat je voor een groot deel kunt laten uitvoeren met behulp van lineaire algebra. Eerder heb je gezien dat je transformaties in het platte vlak kunt beschrijven met een matrix. Hieronder zie je een opsomming van een aantal van die transformaties.

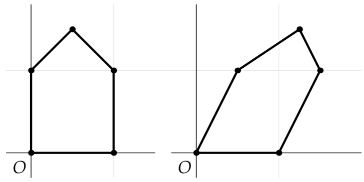
Schalen (uitrekken of krimpen) doe je met een matrix van de vorm $\begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix}$.
Bijvoorbeeld $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ rekt een figuur uit met een factor 2 in de x-richting, en $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & .5 \end{pmatrix}$ doet de figuur met een factor .5 krimpen in de y-richting.



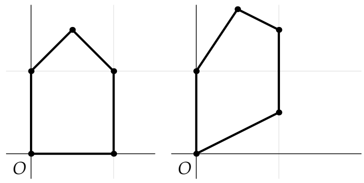
Spiegelen in de x-as doe je met een matrix van de vorm $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
En spiegelen in de y-as met $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Merk op dat spiegelen in de assen een speciaal geval is van schalen, met factor -1.



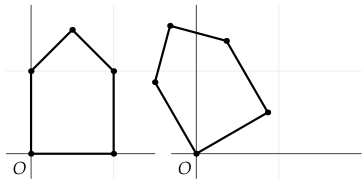
Scheeftrekken in de **x**-richting doe je met een matrix van de vorm $\begin{pmatrix} 1 & s_x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.



Scheeftrekken in de **y**-richting met een matrix van de vorm $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s_y & 1 \end{pmatrix}$.



Roteren om O over een hoek α doe je met een matrix van de vorm $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.



Je kunt afbeeldingen uit deze lijst samenstellen via matrixvermenigvuldiging, maar dat heeft een belangrijke beperking: het zijn lineaire afbeeldingen, en dus zitten alle afbeeldingen vast aan de oorsprong. Wat je in computer graphics veelvuldig nodig hebt is een translatie (verplaatsing). Maar een translatie is geen lineaire afbeelding, omdat daarbij de oorsprong niet op zijn plaats blijft. Hoe dit op te lossen?

De truc is over te gaan op *homogene coördinaten*. Het komt er daarbij op neer dat je het platte vlak, het x, y-vlak, over een afstand 1 als het ware omhoog schuift, naar $z = 1$. Het punt $(2, 4)$ komt dan terecht in het punt $(2, 4, 1)$ en het punt $(0, -1)$ wordt $(0, -1, 1)$. In het algemeen betekent de overgang naar homogene coördinaten:

$$(a, b) \to (a, b, 1)$$

Omgekeerd interpreteer je een punt als $(3, 4, 1)$ als het punt $(3, 4)$ in het platte vlak.

Dit heeft natuurlijk gevolgen voor de matrix van de transformaties. De matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ wordt $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Index